

Marc Nardmann

Pseudo-Riemannian metrics with prescribed scalar curvature

Doctoral thesis. University of Leipzig, 2004. 158 + xviii pages.

Abstract

We consider the following generalisation of a well-known problem in Riemannian geometry: When is a smooth real-valued function s on a given compact n -dimensional manifold M (with or without boundary) the scalar curvature of some smooth pseudo-Riemannian metric of index $q \in \{1, \dots, n-1\}$ on M ? We prove that this is the case for every s if $3 \leq q \leq n-3$, provided M admits a metric of index q at all. In fact, if $3 \leq q \leq n-3$, then each connected component of the space of all pseudo-Riemannian metrics of index q on M contains a metric with scalar curvature s . We prove several theorems for pseudo-Riemannian metrics of index 1 or 2 as well. For instance, we show that on a compact orientable connected 4-dimensional manifold M with nonempty boundary, for every function $s \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ which is positive in at least one point and for every connected component \mathcal{C} of the space of time-orientable Lorentzian (i.e. $-+++$) metrics on M , there exists one metric in \mathcal{C} whose scalar curvature is s .

Marc Nardmann

Pseudo-Riemannsche Metriken mit vorgegebener Skalarkrümmung

Dissertation (englisch). Universität Leipzig, 2004. 158 + xviii Seiten.

Zusammenfassung

Wir betrachten die folgende Verallgemeinerung eines bekannten Problems aus der Riemannschen Geometrie: Wann ist eine glatte reellwertige Funktion s auf einer gegebenen kompakten n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M (mit oder ohne Rand) die Skalarkrümmung einer glatten pseudo-Riemannschen Metrik vom Index $q \in \{1, \dots, n-1\}$ auf M ? Wir beweisen, dass dies für jedes s der Fall ist, sofern $3 \leq q \leq n-3$ gilt und auf M überhaupt eine Metrik vom Index q existiert. Mehr noch, im Fall $3 \leq q \leq n-3$ enthält jede Zusammenhangskomponente des Raums der pseudo-Riemannschen Metriken vom Index q auf M eine Metrik mit Skalarkrümmung s . Wir beweisen außerdem mehrere Sätze für pseudo-Riemannsche Metriken vom Index 1 oder 2. Beispielsweise zeigen wir, dass auf einer kompakten orientierbaren zusammenhängenden 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit M mit nichtleerem Rand zu jeder Funktion $s \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, die in mindestens einem Punkt positiv ist, und zu jeder Zusammenhangskomponente \mathcal{C} des Raums der zeitorientierbaren Lorentz-Metriken (d.h. Metriken vom Typ $-+++$) auf M eine Metrik in \mathcal{C} existiert, deren Skalarkrümmung s ist.