Zusammenfassung der Dissertation

Über die Inversen matrizieller Carathéodoryfolgen

von Dipl.-Math. Armin Rahn

Geben wir uns eine Folge von komplexen $q \times q$–Matrizen vor, so können wir jeweils aus diesen Matrizen eine Untere–Dreiecks–Block–Toeplitz–Matrix bilden, indem wir entlang der Hauptdiagonalen das erste Glied, entlang der ersten Nebendiagonalen das zweite Glied, usw. platzieren. Ist der Realteil einer jeden auf diese Weise gebildeten Block–Toeplitz–Matrix nichtnegativ Hermitesch, so liegt eine Carathéodoryfolge vor. In diesem Fall können wir die Folge als Taylor–MacLaurinsche Koeffizientenfolge einer in der offenen Einheitskreisscheibe holomorphen matrixwertigen Funktion auffassen. Es handelt sich um eine matrizielle Carathéodoryfunktion. Vermöge des Cauchyprodukts erhalten wir die Taylor–MacLaurinsche Koeffizientenfolge des (punktweise gebildeten) Produkts zweier derartiger Funktionen. Wir stellen uns, unter anderem, die Frage ob (und wenn ja, unter welchen Umständen) eine Carathéodoryfolge bezüglich dieser Verknüpfung eine (eventuell verallgemeinerte) Inverse besitzt. Zu einer Carathéodoryfolge finden wir immer – so lautet eines unsere Hauptergebnisse – eine spezielle »inverse Carathéodoryfolge« und, die Carathéodoryfunktionen, welche aus diesen Folgen entstehen, sind im Moore–Penroseschen Sinne sogar zueinander invers.

Wie bekannt können wir die Struktur einer Carathéodoryfolge mit Hilfe der Lösung des Carathéodoryschen Matrix–Erweiterungs–Problems beschreiben. Dieses Standardresultat der matriziellen Schur–Analysis besagt, dass jedes Glied einer Carathéodoryfolge in einem ihm zugeordneten Matrizenkreis liegen muss. Jedes Element einer Carathéodoryfolge erhält demnach eine Darstellung durch den Mittelpunkt und die beiden Halbradien des entsprechenden Matrizenkreises sowie durch einen kontraktiven Schurparameter, womit die Position des Elements innerhalb seines Matrizenkreises bestimmt wird. Weil (nach dem bereits erwähnten Resultat) die Inverse einer Carathéodoryfolge selbst wieder eine Carathéodoryfolge ist, stellen wir uns auch die Frage ob man die Struktur der Inversen auf jene der ursprünglichen Carathéodoryfolge zurückführen kann. Diese Frage führt zu einer expliziten Beschreibung der Zusammenhänge zwischen den Mittelpunkten, Halbradien und Schurparametern der Inversen mit den entsprechenden Parametern der Ausgangs–Carathéodoryfolge.

Eine besondere Teilklasse der Carathéodoryfolgen bilden die Toeplitz–nichtnegativ definiten Folgen. Zu jeder Folge dieser Teilklasse gibt es eine »inverse Carathéodoryfolge«, die jedoch nicht unbedingt Toeplitz–nichtnegativ definit zu sein braucht. Also führen wir einen den Toeplitz–nichtnegativ definiten Folgen angepassten Reziprokenbegriff ein, mit dessen Hilfe es möglich wird, zu jeder Toeplitz–nichtnegativ definiten Folge eine »reziproke Toeplitz–nichtnegativ definite Folge« zu finden. Zu einer Toeplitz–nichtnegativ definiten Folge existiert stets ein nichtnegativ Hermitesches Maß, dessen Fourierkoeffizienten durch diese Folge bestimmt werden. Auf diesem Weg und durch den neuen Reziprokenbegriff gelangen wir zu einer Verallgemeinerung des bekannten »Reziprokenmaßes« (eines nichtnegativ Hermiteschen Maßes).

Neben anderen vorbereitenden Resultaten ist bereits die Herleitung eines Reziprokenbegriffs für beliebige Folgen komplexer $p \times q$–Matrizen von besonderem Interesse. Diese Ergebnisse schließen eine bedeutende Lücke. Nützlich sind auch unsere Resultate über EP–Matrizen sowie deren Real– und Imaginärteile. Als besonders ergiebig erweisen sich unsere Erkenntnisse zu den verallgemeinerten Inversen letzterer Matrizen.