

## Zusammenfassung der Dissertation

# On Hedging and Pricing of Derivatives in Illiquid Markets - A PDE Approach

Ulrike Polte

Diese Arbeit untersucht den Einfluss fehlender Liquidität einer Aktie auf die Absicherung und Bewertung von Derivaten. Dabei wird ein *illiquider* Markt betrachtet, d.h. ein Markt, in dem ein Handel von großen Aktienpaketen den Preis beeinflusst. Deshalb kann ein großer Händler nicht zum aktuellen Kurs kaufen bzw. verkaufen und muss einen Verlust im Vergleich zum Marktpreis akzeptieren. Die Schwierigkeiten beim Bestimmen einer geeigneten Absicherungsstrategie resultieren daraus, dass eine dynamische Absicherungsstrategie selbst den zugrundeliegenden Aktienkurs beeinflusst.

Die Standardbewertungstheorie von Derivaten kann nicht angewendet werden, da sie auf der Annahme eines vollständigen und liquiden Marktes ohne Beschränkungen basiert. Das bekannteste Beispiel, welches auf dieser Annahme beruht, ist das Black-Scholes Modell, welches in Black und Scholes (1973) und in Merton (1973) vorgestellt wird. Allerdings erfüllen reale Märkte diese Annahme nicht. So zeigen auch Ereignisse wie der Börsencrash im Oktober 1987 und die LTCM-Krise 1998, dass das Nichtvorhandensein von Liquidität ein nicht zu verachtender Risikofaktor ist.

In der Literatur gibt es verschiedene Ansätze, um illiquide Märkte zu modellieren, welche in Kapitel 1 vorgestellt werden. Die Arbeit beschäftigt sich mit Modellen mit *Markovstrategien*, d.h. stetige und nur vom Aktienkurs und der Zeit abhängige Strategien. Dann ist die optimale Absicherungsstrategie und ihr Wert für ein Derivat als Lösung einer *nichtlinearen Black-Scholes Gleichung* gegeben. Wenn man auf die Annahme von Markovstrategien verzichtet, wie z.B. in Cetin et al. (2004) untersucht, dann ist die optimale Strategie als Grenzwert stetiger Strategien mit beschränkter Variation gegeben. Diese Arbeit beschränkt sich aber auf Markovstrategien, wodurch eine ökonomisch sinnvolle Bewertung von Derivaten ermöglicht wird.

In Kapitel 2 wird mit Hilfe der Theorie der Viskositätslösungen gezeigt, dass der Preis eines Derivates als Viskositätslösung der nichtlinearen Black-Scholes Gleichung, unter bestimmten Voraussetzungen, die folgenden Eigenschaften hat:

- Existenz einer Viskositätslösung,
- Monotonie im Liquiditätsparameter und
- Monotonie, Konkavität und Inhomogenität in der Auszahlungsfunktion.

Ausserdem ist der Wert eines Derivates in einem absolut illiquiden Markt gegeben durch die konkave Einhüllende der Auszahlungsfunktion. Alle Beweise basieren auf einem Vergleichstheorem, welches unter bestimmten Bedingungen für die nichtlinear Black-Scholes Gleichung hergeleitet wird.

Die Modellierung illiquider Märkte basiert auf *stochastischen Differentialgleichungen* (SDE), wogegen die optimale Strategie durch das Lösen einer *partiellen Differentialgleichung* (PDE) bestimmt wird. Das Lösen einer SDE mit Anfangs- und Endbedingung (FBSDE) kann aber auf das Lösen einer deterministischen PDE zurückgeführt werden und umgekehrt. Das Bestimmen der optimalen Strategie als Lösung einer SDE mit Anfangs- und Endbedingung ist der rein wahrscheinlichkeitstheoretische Ansatz. In Kapitel 3 wird

gezeigt, dass beide Wege – mittels FBSDE oder mittels PDE, wie in den Modellen – das gleiche Resultat liefern.

Eine Untersuchung von impliziten Volatilitäten, welche aus der nichtlinearen Black-Scholes Gleichung resultieren, zeigt, dass sie nicht das typische Verhalten haben, wie es in realen Märkten beobachtet wird. Deshalb wird in Kapitel 4 ein Stochastisches Liquiditätsmodell vorgestellt, in dem ein zweiter stochastischer Prozess eingeführt wird, welcher den Risikofaktor der Liquidität repräsentiert. Ausgangspunkt für das Stochastische Liquiditätsmodell ist das Modell von Frey (2000). Um den Rückkopplungseffekt einer Strategie eines großen Händlers auf den Aktienkurs zu untersuchen, wird eine geeignete Absicherungsstrategie im Kontext der lokalen Risikominierung bestimmt und als Lösung einer nichtlinearen zweidimensionalen partiellen Differentialgleichung beschrieben. Die PDE lässt sich mit Hilfe eines numerischen Verfahrens, welches auf der impliziten Finiten-Differenzen-Methode beruht, lösen.

Dadurch können implizite Volatilitäten im stochastischen Liquiditätsmodell untersucht werden und mit denen im Black-Scholes Modell und im konstanten Liquiditätsmodell von Frey (2000) verglichen werden. Diese Arbeit zeigt, dass stochastische Liquidität das typische Verhalten von impliziten Volatilitäten besser erklären kann als konstante Liquidität, dies gilt insbesondere für deren Asymmetrie. Vor allem die Korrelation zwischen dem Aktienkurs und dem Risikofaktor, welcher die Liquidität beschreibt, hat einen starken Einfluss auf die Struktur der impliziten Volatilitätskurve. Für negative Korrelation erhält man eine fallende implizite Volatilitätsfunktion, d.h. einen sogenannten *Skew*, wie er auch in realen Marktdaten zu finden ist.