

Approximation von Einbettungen periodischer Gevrey- und Korobov-Räume

Zusammenfassung

Martin Petersen

Die Approximation multivariater Funktionen ist ein populäres Forschungsgebiet, da viele Probleme, etwa aus den Fachbereichen Statistik und Quantenchemie, in entsprechenden Funktionenräumen mit hochdimensionalen Definitionsbereichen modelliert sind. Der Übergangsbereich zwischen den glatten und analytischen Funktionen wurde hinsichtlich der Approximationsthematik bisher wenig untersucht. In diesen Bereich sind die sogenannten Gevrey-Klassen einzuordnen, die von dem französischen Mathematiker Maurice Gevrey eingeführt wurden.

Wir befassen uns in dieser Arbeit mit der Approximationsproblematik von periodischen Gevrey-Funktionen auf dem d -dimensionalen Torus \mathbb{T}^d , wobei wir den Approximationsfehler bezüglich der L_2 -Norm messen wollen. Es stellt sich heraus, dass sich die 2π -periodischen Gevrey-Funktionen nicht nur durch das Verhalten ihrer partiellen Ableitungen, sondern ebenso anhand ihrer Fourierkoeffizienten charakterisieren lassen. Genauer gesagt, ist deren gewichtete ℓ_p -Norm mit Gewichten $w(k) = \exp(c \cdot |k|_q^s)$, $k \in \mathbb{Z}^d$, für gewisse Parameter $c, q > 0$ und $s \in (0, 1]$ endlich. Auf Basis dieser neuen Charakterisierung führen wir die periodischen Gevrey-Räume $G_p^{s,c,q}(\mathbb{T}^d)$ ein und messen die Approximierbarkeit der periodischen Gevrey-Funktionen anhand der Approximationszahlen $a_n(I_d : G_p^{s,c,q}(\mathbb{T}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^d))$, $n \in \mathbb{N}$, der Einbettung $I_d : G_p^{s,c,q}(\mathbb{T}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^d)$.

Mithilfe geeigneter Abbildungen lässt sich das Approximationsproblem der Gevrey-Einbettungen, das heißt die Frage nach dem Verhalten eben erwähnter Approximationszahlen, auf ein Problem von Diagonaloperatoren zwischen gewissen Folgenräumen reduzieren. Die präzisesten Resultate erhalten wir hierbei für den Fall $p = 2$, $q = 1$. Unter anderem können wir das exakte asymptotische Verhalten ($n \rightarrow \infty$) der Approximationszahlen angeben, welches für diese Parameter subexponentiell ist.

Ferner gehen wir in dieser Arbeit auch der Frage nach, welche Arten von *Tractability* für die hier vorkommenden Gevrey-Einbettungen vorliegen. Betrachtet man etwa die Einbettungen mit den zuvor genannten Parametern $p = 2$, $q = 1$, so stellt sich heraus, dass das Approximationsproblem *uniformly weakly tractable*, und im analytischen Fall ($s = 1$) sogar *quasi-polynomially tractable* ist.

Neben den Gevrey-Einbettungen untersuchen wir ebenso die Approximation von Einbettungen von Korobov-Räumen in den Funktionenraum $L_2(\mathbb{T}^d)$. Die Vorgehensweise ist hierbei im Wesentlichen dieselbe. Das bedeutet, dass wir für die Bestimmung der Approximationszahlen ein analoges Reduktionsverfahren verwenden. Allerdings erhalten wir im Vergleich zu den Gevrey-Räumen stellenweise nicht so scharfe Resultate.