

Hierarchische Integration und der Strahlungstransport in streuenden Medien

Peter Meszmer

Der Strahlungstransport stellt eine von drei Arten des Wärmetransports zwischen Gebieten unterschiedlicher Temperatur dar. Eine der einfachsten Formen bildet der Strahlungstransport im Vakuum, ein Vorgang, der im kosmischen Umfeld, beispielsweise bei der Energieübertragung von einem Stern auf seine Planeten, beobachtbar ist. Hierbei ist es hinreichend, sich auf die Betrachtung von Oberflächen zu beschränken. Strahlungstransport kann jedoch auch in semitransparenten Medien, wie biologischem Gewebe oder Glas, beobachtet werden. Das Medium, in dem der Strahlungstransport erfolgt, wirkt sich durch Vorgänge wie Absorption, Emission, Reflexion oder Streuung auf den Strahlungstransport aus. Für die Modellierung des Strahlungstransports in einem solchen Umfeld können verschiedene Modelle, darunter das Strahlenmodell, genutzt werden. Dieses Modell beschreibt den Wärmetransport anhand einer skalaren Größe, die Strahlungsintensität genannt wird. Betrachtet wird die Strahlungsintensität in diesem Modell entlang eines Strahls in eine vorgegebene Richtung. Die mathematische Darstellung des Strahlenmodells des Strahlungstransports in partizipierenden Medien führt auf eine richtungsabhängige Integro-Differentialgleichung. Ist die Richtungsabhängigkeit nicht von Interesse, so kann der Übergang zu einer winkelintegrierten Form erfolgen. Dieser Übergang führt schließlich auf ein System schwach singulärer Fredholm'scher Integralgleichungen zweiter Art. Dieses charakterisiert nun nicht mehr die erwähnte Strahlungsintensität, sondern beschreibt die sogenannte Einstrahlung sowie den Strahlungsfluss.

Das System singulärer Integralgleichungen kann mittels eines Galerkin-Ansatzes numerisch gelöst werden. Geht man von einer hinreichenden Glattheit des Randes aus, kann die Kompaktheit des Operators der Integralgleichungen gezeigt werden. Dies wiederum erlaubt Rückschlüsse auf die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung.

Ein Augenmerk bei der Ermittlung der Galerkin-Näherung ist auf die Bestimmung der singulären Integrale der Galerkin-Diskretisierung zu richten. Für die Bestimmung multidimensionaler, singulärer Integrale stellt die Arbeit das Verfahren der hierarchischen Integration vor. Basierend auf einer Zerlegung des Integrationsgebietes, erfolgt die Beschreibung singulärer Integrale durch ein Gleichungssystem, dessen rechte Seite nur von regulären Integralen abhängig ist. Können diese regulären Integrale sowie die Lösung des Gleichungssystems exakt bestimmt werden, so sind auch die singulären Integrale exakt bestimmt. Bei einer numerischen Bestimmung der regulären Integrale ist die Fehlerordnung ausschlaggebend für den

Fehler der singulären Integrale. Als Integrationsgebiete werden Hyperwürfel beliebiger Dimension sowie Simplizes bis einschließlich Dimension 3 als Integrationsgebiete betrachtet. Als Voraussetzungen an den Kern des Doppelintegrals sind nur die Eigenschaften der Translationsinvarianz sowie der Homogenität zu richten. Kann ein nicht translationsinvarianter oder nicht homogener Kern eines Integrals in Summanden zerlegt werden, die selbst translationsinvariant und homogen sind, ist auch die Bestimmung solcher Integrale möglich. Darüber hinaus stellt die Arbeit Verbindungen zu dem Begriff des Hadamard partie finie her. Auf diese Weise lässt sich das Verfahren der hierarchischen Integration für beliebige Dimensionen und beliebige Singularitätsordnungen anwenden.

Die Strahlungstransportgleichung ist im Allgemeinen mittels eines Galerkin-Ansatzes lösbar, führt jedoch auf eine voll besetzte Systemmatrix. Numerische Beispiele beleuchten daher Methoden der Matrixkompression mittels hierarchischer Matrizen sowie der direkten Erzeugung schwach besetzter Matrizen über regulären Gittern und Gittern mit hängenden Knoten und skizziert Ansätze zur Parallelisierung auf entsprechenden Computersystemen.