Selbstadjungierte lineare DAEs und ihre Numerik (Dipl.-Math. Rico Hoffmann)

Problemstellung

In dieser Arbeit betrachten wir allgemein selbstadjungierte Paare von Matrixfunktionen $(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ und strukturierte DAEs der Form

$$\begin{bmatrix} 0 & E & 0 \\ -E^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda \\ x \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A & B \\ A^T + \frac{d}{dt}E^T & W & S \\ B^T & S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ x \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

mit $E, A, \in C^0(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{p,p})$, $W \in C^0(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{p,p})$, $B \in C^0(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{p,l})$, $S \in C^0(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{p,l})$, $R \in C^0(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{l,l})$ und $f_1 \in C^0(\mathbb{I}, \mathbb{R}^p)$, wobei $R = R^T$ und $W = W^T$. Darüber hinaus ist $\mathbb{I} = [t_0, T]$ ein reelles Zeitintervall.

Unter der Voraussetzung, dass das Paar von Matrixfunktionen (E, A) strangenessfrei ist, erhalten wir dieses lineare DAE-System, indem wir das linear-quadratische Steuerungsproblem zur Minimierung des Kostenfunktionals in der allgemeinen Form

$$\mathcal{J}(x, u) = \frac{1}{2} x(t_0)^T M_e x(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{T} (x^T W x + x^T S u + u^T S^T x + u^T R u) dt \tag{2}$$

unter der Nebenbedingung

$$E\dot{x} = Ax + Bu + f_1, \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^p \tag{3}$$

betrachten, wobei $M_e \in \mathbb{R}^{p,p}$ symmetrisch ist. Hinzukommen die Randbedingungen

$$x(t_0) = x_0, \quad E(T)^T \lambda(T) - M_e x(T) = 0. \tag{4}$$

Insbesondere ist das Paar von Matrixfunktionen

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & E & 0 \\ -E^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & A & B \\ A^T + \frac{d}{dt}E^T & W & S \\ B^T & S^T & R \end{bmatrix} \right) \tag{5}$$

selbstadjungiert. Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung und Entwicklung von angepassten Diskretisierungen, die die spezielle Struktur der DAE im Optimaltitätsrandwertproblem (1),(4) ausnutzen.

Ergebnisse

Den wesentlichen Bestandteil für die analytische Untersuchung der selbstadjungierten linearen DAEs auf Symplektizität bildet das Konzept der Kongruenztransformationen. Insbesondere im strukturierten Fall (1) trägt die x-Komponente als Zustandsvektorfunktion eine physikalische Bedeutung. Aus diesem Grund wenden wir darauf ausschließlich punktweise orthogonale Transformationen an.

In Abschnitt (3.1) haben wir den Fall der strukturierten DAEs mit Strangeness-Index $\mu = 0$ untersucht. Mit Hilfe von Kongruenztransformationen haben wir gezeigt, dass die DAE einen zugrunde liegenden symplektischen Fluß besitzt. Die angewandten Transformationen basieren auf glatten Zerlegungen.

Zur Behandlung eines allgemein selbstadjungierten Paares von Matrixfunktionen $(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ mit Strangeness-Index $\mu = 0$ haben wir die Techniken aus Abschnitt (3.1) verallgemeinert und angewandt. Es ist uns gelungen ein zugrunde liegendes Hamiltonsystem schrittweise zu extrahieren.

Unter der Annahme, dass die zum allgemein selbstadjungierten Paar von Matrixfunktionen $(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ gehörige DAE $\mathcal{E}\dot{z} = \mathcal{A}z + h$ sowohl einen wohldefinierten Strangeness-Index als auch einen zugrunde liegenden symplektischen Fluß besitzt, haben wir in Abschnitt 3.3 das zugrunde liegende Hamiltonsystem mit Hilfe von Hypothese 2.35 extrahiert.

Um im obigen strukturierten Fall mit beliebigem Strangeness-Index eine Indexreduktion durchführen zu können und gleichzeitig die physikalische Bedeutung der x-Komponente zu wahren mussten wir strukturiert vorgehen. Dazu haben wir den Fall Strangeness-Index $\mu = 2$ für konstante Koeffizienten ausführlich diskutiert.

In Kapitel 4 haben wir die Numerik der in Abschnitt 3 entwickelten Techniken besprochen. Dabei haben wir zunächst die glatten Transformationen basierend auf der glatten QR-Zerlegung näher besprochen. Insbesondere wurde die konsistente Gauß-Kollokation als numerisches Verfahren für DAEs ausführlich vorgestellt. Angewandt haben wir es zunächst auf selbstadjungierten strukturierten DAEs mit $\mu = 0$ (Abschnitt 4.6). In Verbindung mit der numerischen Indexreduktion (Abschnitt 4.4) haben wir die konsistente Gauß-Kollokation auch für den allgemeinen selbstadjungierten Fall mit beliebigem Strangeness-Index (Abschnitt 4.7) entwickelt.

In Kapitel 5 haben wir die theoretischen Resultate aus Kapitel 3 und 4 an einer Vielzahl verschiedener und aussagekräftiger Beispiele numerisch bestätigt. Dabei haben wir zunächst die Bedeutung der glatten Transformationen beispielhaft verdeutlicht.