

Numerische Behandlung zeitabhängiger akustischer Streuung im Außen- und Freiraum

Dissertation

Volker Gruhne

Lineare hyperbolische partielle Differentialgleichungen in homogenen Medien, beispielsweise die Wellengleichung, die die Ausbreitung und die Streuung akustischer Wellen beschreibt, können im Zeitbereich mit Hilfe von Randintegralgleichungen formuliert werden. Im ersten Hauptteil dieser Arbeit stellen wir eine effiziente Möglichkeit vor, numerische Approximationen solcher Gleichungen zu implementieren, wenn das Huygens-Prinzip nicht gilt.

Wir nutzen die Faltungsquadraturmethode für die Zeitdiskretisierung und eine Galerkin-Randelement-Methode für die Raumdiskretisierung. Mit der Faltungsquadraturmethode geht eine diskrete Faltung der Faltungsgewichte mit der Randdichte einher. Bei Gültigkeit des Huygens-Prinzips konvergieren die Gewichte exponentiell gegen null, sofern der Index hinreichend groß ist. Im gegenteiligen Fall, das heißt bei geraden Raumdimensionen oder wenn Dämpfungseffekte auftreten, kann kein Verschwinden der Gewichte beobachtet werden. Das führt zu Schwierigkeiten bei der effizienten numerischen Behandlung.

Im ersten Hauptteil dieser Arbeit zeigen wir, dass die Kerne der Faltungsgewichte in gewisser Weise die Fundamentallösung im Zeitbereich approximieren und dass dies auch zutrifft, wenn beide bezüglich der räumlichen Variablen abgeleitet werden. Da die Fundamentallösung zudem für genügend große Zeiten, etwa nachdem die Wellenfront vorbeigezogen ist, glatt ist, schließen wir Gleiches auch in Bezug auf die Faltungsgewichte, die wir folglich mit hoher Genauigkeit und wenigen Interpolationspunkten interpolieren können. Darüber hinaus weisen wir darauf hin, dass zur weiteren Einsparung von Speicherkapazitäten, insbesondere bei Langzeitexperimenten, der von Schädle et al. entwickelte schnelle Faltungsalgorithmus eingesetzt werden kann. Wir diskutieren eine effiziente Implementierung des Problems und zeigen Ergebnisse eines numerischen Langzeitexperimentes.

Im zweiten Hauptteil dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit Transmissionsproblemen der Wellengleichung im Freiraum. Solche Probleme werden gewöhnlich derart behandelt, dass der Freiraum, wenn nötig durch Einführen eines künstlichen Randes, in ein unbeschränktes Außengebiet und ein beschränktes Innengebiet geteilt wird mit dem Ziel, eventuelle Inhomogenitäten oder Nichtlinearitäten des Materials vollständig im Innengebiet zu konzentrieren. Wir werden eine Lösungsstrategie vorstellen, die es erlaubt, die aus der Teilung resultierenden Teilprobleme so weit wie möglich unabhängig voneinander zu behandeln. Die Kopplung der Teilprobleme erfolgt über Transmissionsbedingungen, die auf dem ihnen gemeinsamen Rand vorgegeben sind.

Wir diskutieren ein Kopplungsverfahren, das auf verschiedene Diskretisierungsschemata für das Innen- und das Außengebiet zurückgreift. Wir werden insbesondere ein explizites Verfahren im Innengebiet einsetzen, im Gegensatz zum Außengebiet, bei dem wir ein auf ein Mehrschrittverfahren beruhendes Faltungsquadraturverfahren nutzen. Die Kopplung erfolgt nach der Strategie von Johnson und Nédélec, bei der die direkte Randintegralmethode zum Einsatz kommt. Diese Strategie führt auf ein unsymmetrisches System. Wir analysieren das diskrete Problem hinsichtlich Stabilität und Konvergenz und unterstreichen die Einsatzfähigkeit des Kopplungsalgorithmus mit der Durchführung numerischer Experimente.