

Über die Lösung von elliptischen Randwertproblemen mittels Gebietszerlegungstechniken, Hierarchischer Matrizen und der Methode der finiten Elemente

VON FLORIAN DRECHSLER

In der Arbeit entwickeln wir einen Löser für elliptische Randwertprobleme. Dazu diskretisieren wir ein Randwertproblem mittels der Methode der finiten Elemente und erhalten ein Gleichungssystem.

Mittels Gebietszerlegungstechniken unterteilen wir das Gebiet der Differentialgleichung und können Teilprobleme des Randwertproblems definieren. Durch die Gebietszerlegung wird eine Hierarchie von Zerlegungen definiert, die wir mittels eines Gebietszerlegungsbaumes festhalten. Anhand dieses Baumes definieren wir nun einen Löser für das Randwertproblem. Dabei berechnen wir die verschiedenen Matrizen des Löses durch den sogenannten HDD-Algorithmus (engl. „Hierarchical Domain Decomposition“).

Die meisten der zu erstellenden Matrizen sind dabei vollbesetzt, weshalb wir sie mittels Hierarchischer Matrizen approximieren. Mit Hilfe der Hierarchischen Matrizen können wir die Matrizen mit einem fast linearen Aufwand erstellen und speichern. Der Aufwand der Matrixoperationen ist ebenfalls fast linear.

Damit wir die Hierarchischen Matrizen für den HDD-Algorithmus verwenden können, müssen wir die Technik der Hierarchischen Matrizen erweitern. Unter anderem führen wir eingeschränkte Clusterbäume, eingeschränkte Blockclusterbäume und die verallgemeinerte Addition für Hierarchische Matrizen ein. Zusätzlich führen wir eine neue Clusterbaum-Konstruktion ein, die auf den HDD-Algorithmus zugeschnitten ist.

Die Kombination des HDD-Algorithmus mit Hierarchischen Matrizen liefert einen Löser, den wir mit einem fast linearen Aufwand berechnen können. Der Aufwand zur Berechnung einer Lösung sowie der Speicheraufwand ist ebenfalls fast linear. Des Weiteren geben wir noch einige Modifizierungen des HDD-Algorithmus für weitere Anwendungsmöglichkeiten an.

Zusätzlich diskutieren wir die Möglichkeiten der Parallelisierung, denn durch die Verwendung der Gebietszerlegung wird das Randwertproblem in unabhängige Teilprobleme aufgeteilt, die sich sehr gut parallelisieren lassen.

Wir schließen die Arbeit mit numerischen Tests ab, die die theoretischen Aussagen bestätigen.