Asymptotische Resultate über Lokalzeiten von Irrfahrten im $\mathbb{Z}^d$

Zusammenfassung für die Verteidigung der Dissertation an der Fakultät für Mathematik und Informatik der Universität Leipzig

Dipl.-Math, Dipl.-Wirtsch.-Math. Mathias Becker

Gegenstand der vorliegenden Dissertation ist das Verhalten sogenannter Selbstüberschneidungslokalzeiten $\|\ell_t\|_p^p$ einer zeitstetigen Irrfahrt $(S_r)_r$ auf dem d-dimensionalen Gitter $\mathbb{Z}^d$. Dabei ist die Funktion ℓ_t definiert durch

$$\ell_t(z) := \int_0^t \mathbb{1}_{\{S_r=z\}}\,\mathrm{d}r$$

und bezeichnet die Aufenthaltsdauer der Irrfahrt bis zum Zeitpunkt $t \in (0,\infty)$ im Punkt $z \in \mathbb{Z}^d$. Ziel ist es, ein Prinzip großer Abweichungen zu entwickeln, d.h. das Hauptaugenmerk liegt auf dem asymptotischen Verhalten der Wahrscheinlichkeit, dass die Selbstüberschneidungslokalzeiten von ihrem Erwartungswert in erheblichem Maße nach oben abweichen. Mit anderen Worten; es soll das asymptotische Verhalten von

$$\log \mathbb{P}(\|\ell_t\|_p^p \geq r_t^p)$$

genau bestimmt werden, wobei $r_t^p \in (0,\infty)$ schneller als der Erwartungswert $\mathbb{E}[\|\ell_t\|_p^p]$ gegen unendlich streben soll. Dieses Verhalten kann dabei durch t, r_t und eine gewisse Variationsformel beschrieben werden.

Es wird sich herausstellen, dass es zwei Fälle zu betrachten gilt, in denen sich das probabilistisch beste Verhalten stark unterscheidet; die genaue Position des Phasenübergangs hängt dabei von den Parametern p und d ab. Diese beiden Fälle werden als „subkritisch“ und als „superkritsch“ bezeichnet.

In kleinen Dimensionen (im sogenannten subkritischen Fall) entstehen die nötigen Selbstüberschneidungen entlang des gesamten Pfades der Irrfahrt. Aufgrund dieses (zeitlich homogenen) Verhaltens ist bei der mathematischen Modellierung eine Reskalierung erforderlich. In hohen Dimensionen (dem sogenannten superkritischen Fall) ist dies nicht nötig, da die erforderlichen Selbstüberschneidungen innerhalb eines begrenzten Intervalles (endlicher Größenordnung) erfolgen.

Theorem (Hauptergebnis der Dissertation)**.**
Es bezeichne $(S_t)_{t>0}$ eine zeitstetige (Nächstnachbarschafts-)Irrfahrt auf dem Gitter $\mathbb{Z}^d$ (mit $d \in \mathbb{N}$). Darüber hinaus sei $p > 1$ und es bezeichne r_t eine beliebige Skalenfunktion mit $t^{(1-p)/p} \ll r_t \ll 1$ für $t \to \infty$. Dann gilt:

1. *Sofern im subkritischen Fall $d(p-1) < 2p$ zusätzlich gilt, dass*
   - *(a)* $d(p-1) < 2$
   - *(b)* $\left(\frac{\log t}{t}\right)^{\frac{d(p-1)}{p(d+2)}} \ll r_t \qquad$ *für $t \to \infty$.*

   so folgt im Grenzwert $t \to \infty$, dass
   $$\frac{1}{t} \log \mathbb{P}\big(\big\|\ell_t/t\big\|_p \geq r_t\big) \sim -\chi_{d,p} r_t^{\frac{2p}{d(p-1)}}$$
   Dabei bezeichnet $\chi_{d,p} := \inf\Big\{ \frac{1}{2}\|\nabla g\|_2^2 \colon g \in L^{2p}(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d) \cap H^1(\mathbb{R}^d) \colon \|g\|_2 = 1 = \|g\|_{2p} \Big\}$.

2. *Sofern im superkritischen Fall $d(p-1) > 2p$ zusätzlich gilt, dass*
   - *(a)* $p \in \mathbb{N}$
   - *(b)* $\left(\frac{p \log(t r_t)}{t}\right)^{\frac{p-1}{3p-1}} \ll r_t \qquad$ *für $t \to \infty$*

   so folgt im Grenzwert $t \to \infty$, dass
   $$\frac{1}{t} \log \mathbb{P}\left[\|\ell_t/t\|_p \geq r_t\right] \sim -r_t \inf_{\substack{f:\mathbb{Z}^d \to \mathbb{R} \\ \|f\|_2 = 1}} \left\{ \frac{\langle f, -Af \rangle}{\|f\|_{2p}^2} \right\}$$
   Dabei bezeichne A den Generator der zugrundeliegenden Irrfahrt $(S_t)_t$.

Das Interesse an der Untersuchung entstand unter anderem aus der Verbindung zu Modellen der statistischen Mechanik (parabolisches Anderson Modell) und zur Variationsanalysis. In der Vergangenheit wurde eine Vielzahl an Methoden benutzt, um dieses Problem zu lösen. In der vorliegenden Dissertation wird die sogenannte Momentenmethode bestmöglich ausgereizt werden und es wird gezeigt, welche Ergebnisse damit möglich sind.

Publikationen

- M. Becker und W. König,
  Self-intersection local times of random walks: Exponential moments in subcritical dimensions,
  Jour. Theor. Prob. **22:2**, 365 - 374 (2009).

- M. Becker und W. König,
  Moments and distribution of the local times of a transient random walk on $\mathbb{Z}^d$,
  Probab. Theory Relat. Fields **154:3**, 585-605 (2012)