

Zusammenfassung der Dissertation

## **Maßwertige Lösungen für ein Gleichungssystem zur Beschreibung von Phasenübergängen in Kristallen**

vorgelegt von

Diplom-Mathematiker Diplom-Physiker Steffen Arnrich

In dieser Arbeit wird ein mathematisches Modell für eine Klasse von fest-fest Phasenübergängen in Einkristallen, die durch die Diffusion einer oder mehrerer Partikelspezies hervorgerufen werden, präsentiert und gezeigt, daß es eine maßwertige Lösung besitzt. Hierzu wird das Existenztheorem für Young-Maße auf den Fall von Banach-Räumen mit separablem Dual verallgemeinert.

Das aus den Theorien der Linearen Nichtgleichgewichtsthermodynamik und der Kontinuumsmechanik abgeleitete Modell berücksichtigt explizit an den Phasengrenzflächen eventuell auftretende große elastische Deformationen. Damit werden bereits bekannte Modelle mit linearen Elastizitätsgesetzen verallgemeinert. Der in die freie Energie eingehende Oberflächenanteil wird ebenfalls mittels eines Terms erfaßt.

Zur Beantwortung der Frage nach der Existenz von Lösungen werden die Gleichungen unter Verwendung des Luckhausschen  $Q - Q^*$ -Prinzips implizit in der Zeit mit Schrittweite  $h > 0$  diskretisiert und in Variationsprobleme überführt. Mittels der direkten Methode der Variationsrechnung werden diese dann gelöst. Aufgrund fehlender Aussagen über das zeitoszillatorische Verhalten der zeitdiskreten Lösungen und der Nichtlinearitäten des Modells läßt sich die Existenz eines schwachen Grenzwerts für  $h \rightarrow 0$  nicht beweisen.

Durch einen Mittelungsprozeß wird aus dem Begriff der schwachen Lösung der der maßwertigen Lösung abgeleitet. Dazu werden die zeitdiskreten Lösungen als Abbildungen von einem beliebigen, aber festem Zeitintervall in ein Produkt von unendlichdimensionalen Banach-Räumen aufgefaßt. Um eine Lösung im Sinne von Maßen zu erhalten, wird das Youngsche Theorem auf eine bestimmte Klasse dieser Produkträume erweitert. Dies geschieht unter Verwendung des Rieszschen Darstellungssatzes für vollständig reguläre Räume durch eine Konstruktion von positiven Linearformen auf der linearen Hülle der Zylinderfunktion und mittels eines Approximationsresultats dieser Funktionen für stark bzw. schwach stetige Funktionen auf starken bzw. schwachen Kompakta. Die Ergebnisse werden dann auf dem ganzen Raum stetige Funktionen bzw. unterhalbstetige Funktionen mit einem gewissen Wachstumsverhalten ausgedehnt.

Durch Übergang zu einer Lagrangeschen Formulierung des Modells wird im zentralen Theorem dieser Arbeit die Existenz einer maßwertigen Lösung und einer wohldefinierten Lagrange-Teilchendichte gezeigt, falls die Volumenenergiedichten einer Summendarstellung genügen. Schließlich wird eine schwache Energieungleichung bewiesen.